Mac5796. Aula 3

Walter Mascarenhas

25/03/11

Resumo

A aula passada:

- A bolsa negocia ações e contratos.
- Ela se comunica com o mundo através de mensagens eletrônicas.
- O resultado dessas mensagens é resumido pelos Livros de Ofertas.
- Há MUITOS detalhes envolvidos em tudo isto. Nós vamos ignorá-los e focar na matemática.

Modelos matemáticos:

- Resumo simplificado da realidade.
- Neste curso os modelos são probabilísticos.
- Visão simplista:

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{Numero casos favoraveis}}{\text{Numero total de casos}}$$

- Problemas:
  - Os casos individuais podem ter probabilidades distintas.
  - O número de casos pode ser infinito.

Porque perder tempo com modelos com número infinito de casos?

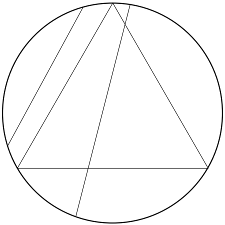
- Apesar da dificuldade inicial, eles são mais fáceis de manipular.
- Eles facilitam a elaboração de resumos e estimativas:
    - Uma população de 190 milhões de pessoas

      versus
    - 2 números: média e variância.

Resumir, estimar e simplificar é essencial para entender.

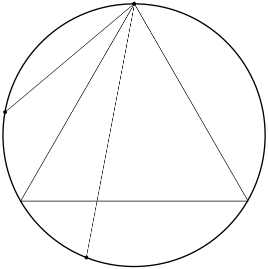
O paradoxo de Bertrand.

Problema: dado um círculo de raio unitário, ao escolhermos uma corda **ao acaso** qual é a probabilidade da corda escolhida ter comprimento maior que $\sqrt{3}$, que é o lado do triângulo equilátero inscrito no círculo?



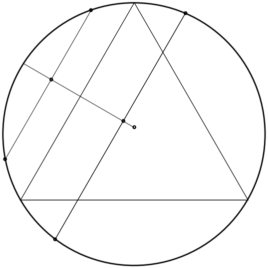
O paradoxo de Bertrand.

Três soluções, que dependem da definição de *acaso*



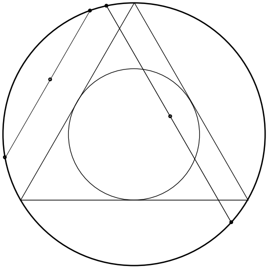
$1/3$

Escolhemos um vértice
e depois o outro.



$1/2$

Escolhemos o raio ortogonal
a corda e depois o ponto
a intersecao corda com o raio.



$1/4$

Escolhemos o ponto
médio da corda.

Solução do paradoxo de Bertrand:

Conceitos diferentes de **escolha ao acaso** levam a probabilidades diferentes. No big deal.

Não há razão para alarme. O mundo é assim mesmo. Por exemplo, se todo mundo estimasse os preços do mesmo modo não haveria negociação nem este curso.

Solução do paradoxo de Bertrand:

Conceitos diferentes de **escolha ao acaso** levam a probabilidades diferentes. No big deal.

Não há razão para alarme. O mundo é assim mesmo. Por exemplo, se todo mundo estimasse os preços do mesmo modo não haveria negociação nem este curso.

Aprendendo com o paradoxo de Bertrand.

Usando a linguagem e os conceitos apropriados podemos entender claramente o que se passa no Paradoxo de Bertrand.

Conceitos:

- Espaço Amostral.
- Eventos.
- Medida de Probabilidade.
- Eventos = membros de uma σ-álgebra.

O primeiro passo para se fazer um modelo probabilístico é identificar o *espaço amostral** apropriado.

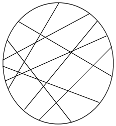
> *Espaço Amostral é o conjunto de todas as possíveis situações que desejamos modelar.*

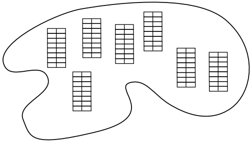
- O conjunto de todas as cordas de um círculo dado.
- O conjunto de todos os estados possíveis do livro de ofertas.
- O conjunto de todos os cenários possíveis para a inflação.

*Conceito introduzido por von Mises, um clássico que não vingou.

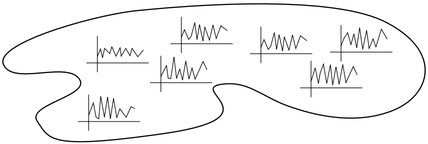
Espaço amostral para o problema de Bertrand: $\Omega =$ conjunto *abstrato* de todas as cordas do círculo.

Espaço amostral do Bertrand
O conjunto das cordas





Espaço amostral da Bm&f
O conjunto de todos
estados do livro



Espaço amostral do Tombini: O conjunto de
todas as curvas de inflação concebíveis

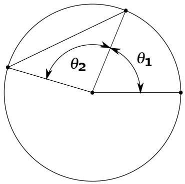
Um mesmo espaço amostral pode ser encarado de várias formas.

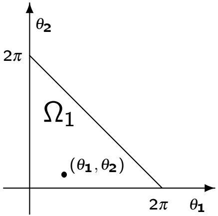
Por exemplo, podemos pensar que o espaço das cordas Ω é equivalente ao conjunto

$$\Omega_1 = \{ (\theta_1, \theta_2), \ \theta_1 \in [0, 2\pi) \ \text{ e } \ \theta_2 \in (0, 2\pi - \theta_1) \}.$$

Ou seja, uma corda corda é definida por dois ângulos distintos.

Ω

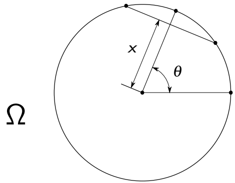


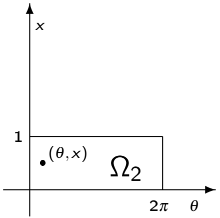


Outro exemplo, podemos pensar que o espaço das cordas Ω é equivalente ao conjunto

$$\Omega_2 = \{\, (\theta, x), \;\; \theta \in [0, 2\pi) \;\; \text{e} \;\; x \in (0,1) \,\}.$$

Ou seja, uma corda corda é definida pelo raio ortogonal a ela e a posição dela ao longo do raio.



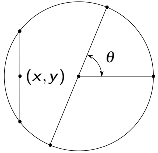


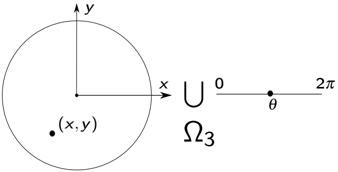
Outro exemplo, podemos pensar que o espaço das cordas Ω é equivalente ao conjunto

$$\Omega_3 = [0, 2\pi) \bigcup \{ (x, y), \text{ com } \ 0 < x^2 + y^2 < 1 \}$$

Ou seja, há dois tipos de corda:

- As que passam pela origem são representadas por sua inclinação $\theta \in [0, 2\pi)$.
- As que não passam pela origem são representadas pelo seu ponto médio.



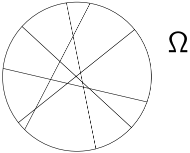


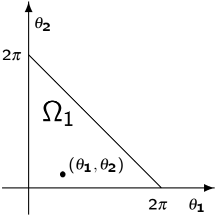
Um *evento* é um subconjunto do espaço amostral.

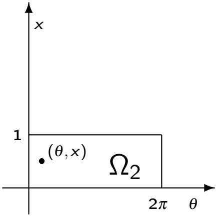
- O comprimento da corda é maior que o lado do triângulo equilátero inscrito. Dentre todas as cordas, este evento corresponde às que tem comprimento maior que $\sqrt{3}$.
- Amanhã o spread será no máximo R$1,50. Ou seja, dentre todas as configurações possíveis do livro, este evento contém aquelas nas quais o spread amanhã não ultrapassará R$1,50.
- A inflação em 2011 estará dentro da meta. Ou seja, dentre todos os possíveis cenários de inflação, este evento (ou cenário) contém aqueles nos quais a inflação de 2011 está no intervalo $(2,5\%\ ,\ 6,5\%)$.

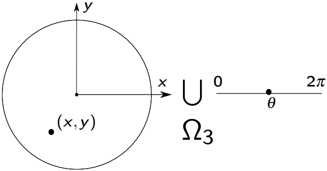
Nosso objetivo é calcular (ou estimar) a probabilidade de eventos relevantes.

Calculando a probabilidade do evento de Bertrand.

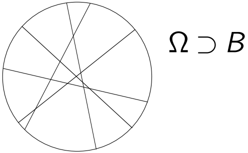


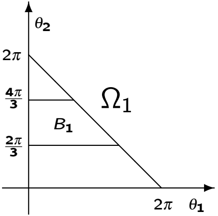




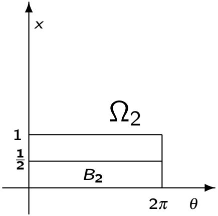


Calculando a probabilidade do evento de Bertrand (B).

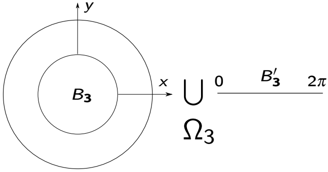




Area de B_1 = (Area de Ω_1)/3

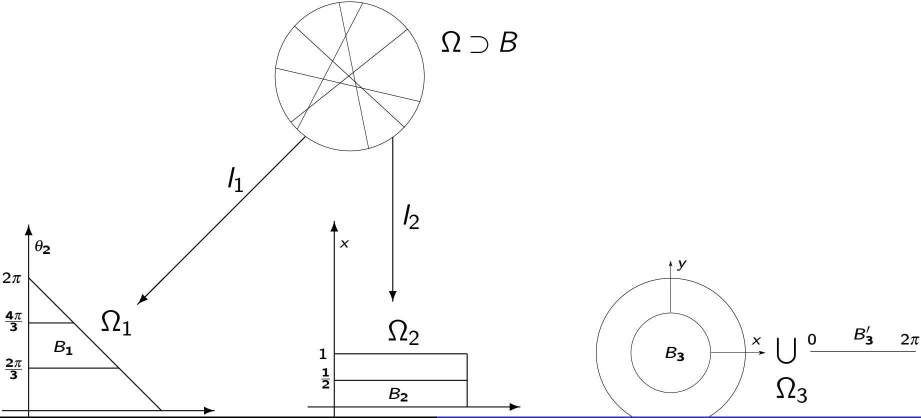


Area de B_2 = (Area de Ω_2)/2



Area de B_3 = (Area de Ω_3)/4

O paradoxo de Bertrand nasce de pensarmos em probabilidade como área. Como as interpretações abaixo levam a áreas distintas obtemos probabilidades distintas. Por exemplo, a áreas B_1 e B_2 são relacionadas pelo Jacobiano da função $f(x) = I_2\left(I_1{}^{-1}(x)\right)$.

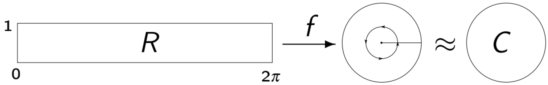


Jacobianos e o cálculo da área do círculo. A área do círculo C não é alterada se removermos um raio. A transformação f dada por $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ leva o retângulo $R = (0,2\pi) \times (0,1]$ no círculo C menos um raio e tem Jacobiano

$$Jf(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Logo,

$$\mathrm{Area}(C) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta = \pi \neq 2\pi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 dr = \mathrm{Area}(R).$$



Moral da história: Se quisermos definir probabilidade a partir de áreas então temos que escolher uma definição básica e usar integrais envolvendo Jacobianos para calcular probabilidades de modo consistente se mudarmos de "referencial".

Bertrand criou seu paradoxo por não levar em conta os Jacobianos.

Ulam e Kolmogorov ($\approx$ 1930) tiveram uma idéia melhor: Esqueça esta visão bitolada de só pensar em probabilidade como área. Seja moderno, amplie seus horizontes e encare probabilidade como um conceito em si. Ela pode até, por coincidência, estar ligada à geometria, mas não necessariamente.

(Fizemos 300 anos de história em duas aulas, ou quase...)

Os axiomas de Kolmogorov.

Um espaço de probabilidade é uma tripla $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ onde

- Ω é um conjunto chamado de espaço amostral.
- $\mathcal{A}$ é uma família de subconjuntos de Ω, chamados de eventos. $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra (não se desespere, eu já explico...)
- $\mathbb{P} : \mathcal{A} \mapsto [0,1]$ é uma *medida de probabilidade* i.e.,
  - $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$.
  - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  - $\mathbb{P}(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$ se os A_k forem disjuntos.

Sob o ponto de vista de Kolmogorov, Bertrand definiu uma espaço amostral Ω (o conjuntos das cordas), uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ (tenha paciência...) e **três** medidas de probabilidade $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ e $\mathbb{P}_3$, definidas a partir das três interpretações geométricas que discutimos.

Com isto Bertrand obteve três modelos distintos: $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_1)$ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_2)$ e $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_3)$. Nada mais natural portanto que ele obtivesse três resposta diferentes, uma para cada modelo.

Próxima parada: σ-álgebras.

Conselho:

Ao estudar algum assunto matemático, procure encontrar situações concretas que se relacionam ao que você está estudando. Tente entender o que a matemática diz sobre a situação concreta e o que a situação concreta sugere em termos matemáticos.

Pode não parecer, mas muitos matemáticos tem motivações bastante práticas para estudar o que estudam (Kolmogorov e Ulam certamente tinham).

Nossa cobaia para entender σ-álgebras:

Um modelo simplificado da evolução do preço de um ativo:

O preço de um ativo é atualizado de segundo em segundo. A cada segundo ele tem probabilidade $1/2$ de subir um “tick” ε e probabilidade $1/2$ de descer ε. O preço inicial é p_0.

Pretendemos acompanhar a evolução do preço ao longo de um pregão de 8 horas $=$ N $= 28800$ segundos.

Qual é o espaço amostral?

Uma possibilidade:

$$\Omega = \{\, \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N),\ \omega_i = \pm 1 \,\}.$$

Cada elemento do espaço amostral é uma seqüência de $N = 28800$ mais ou menos uns ($1 =$ subiu, $-1 =$ desceu), que podemos chamar de cenário de preços.

Finito mas monstruoso: $2^N = 2^{28800} \approx 10^{9600} = 1$ seguido de 9600 zeros.

Alguns eventos interessantes:

- O mercado fechou em alta:

$$A = \left\{ \omega \in \Omega \text{ tal que } \sum_{k=1}^{N} \omega_k > 0 \right\}.$$

- O mercado fechou em baixa:

$$B = \left\{ \omega \in \Omega \text{ tal que } \sum_{k=1}^{N} \omega_k < 0 \right\}.$$

- O tinha um stop inferior de $p_0 - 100\varepsilon$ e fui stopado.

$$S = \left\{ \omega \in \Omega \text{ tal que } \min_{1 \leq k \leq N} \sum_{j=1}^{k} \omega_j < -100 \right\}.$$

Pergunta natural:

Quais as probabilidades dos eventos A, B e S?

A resposta depende de quando for feita a pergunta!

- Se você me perguntar no começo do pregão qual a probabilidade do evento A (alta) eu vou responder que é praticamente $1/2$.
- Se você me perguntar no meio do pregão e eu estiver acompanhando os preços então eu vou te dar uma outra resposta, que vai depender da informação que eu tiver na hora.
- Se você me perguntar após o fim do pregão eu te darei a resposta 0 ou 1, dependendo do que aconteceu.

Ou seja, probabilidade tem tudo a ver com informação e observação. Quanto mais eu tiver observado, mais eu saberei dizer quais cenários são prováveis e quais são improváveis.

- No começo do dia eu ainda não observei coisa alguma. Por isso eu não consigo distinguir os cenários. Para mim eles estão todos no mesmo saco.
- No meio do dia eu terei um discernimento maior. Eu terei observado muitos preços e saberei classificar melhor os cenários.
- No fim do dia eu terei informação completa e classificarei os cenários com perfeição.

σ-álgebras são um modo de formalizar a idéia de que a observação dá poder de discernimento. Para cada conjunto de observações está associada uma σ-álgebra.

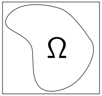
- Observando o primeiro elemento do cenário $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$ eu saberei se ele é -1 ou 1. Esta observação me permitirá particionar o espaço amostral em dois conjuntos A_- e A_+.
- Sempre sei dizer se $\omega \in \emptyset$ (obviamente não) e $\omega \in \Omega$ (é óbvio que sim).
- Portanto, ao observar ω_1 saberei se ω pertence a cada um dos quatro elementos da família $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, A_-, A_+, \Omega\}$.
- Esta família $\mathcal{A}_1$ é a σ-álgebra associada à observação de ω_1.

- Observando os dois primeiros elementos do cenário $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$ eu saberei se eles são -1 ou 1. Esta observação me permitirá particionar o espaço amostral em quatro conjuntos A_{--}, A_{-+}, A_{+-} e A_{++}.
- Ao observar ω_1 e ω_2 saberei se ω pertence a cada um dos 16 elementos da família

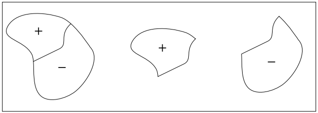
$$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, A_{-}, A_{+}, A_{\pm -}, A_{\pm +}, A_{--} \cup A_{++}, A_{-+} \cup A_{+-},$$

$$A_{--}, A_{-+}, A_{+-}, A_{++}, A_{--}^c, A_{-+}^c, A_{+-}^c, A_{++}^c, \Omega\}.$$

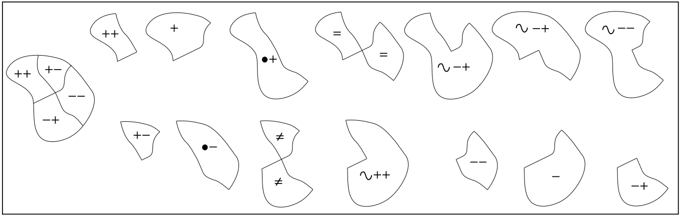
- Esta família $\mathcal{A}_2$ é a σ-álgebra associada à observação de ω_1 de ω_2.



Sem observações: não diferencio cenários.
É tudo (Ω) ou nada ($\emptyset$).



Uma observação: quebro o espaço amostral em dois.



Duas observações: quebro o espaço amostral em 4 partes.
Estas partes podem ser agrupadas de 16 modos.

Formalmente, dado um espaço amostral Ω, uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ é uma família de subconjuntos de Ω tal que

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- Se $A \in \mathcal{A}$ então $A^c \in \mathcal{A}$.
- Se $\{A_k, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.